Глава IX. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Лекции 34–36

Функции одной независимой переменной не охватывают *все* зависимости, существующие в природе. Поэтому естественно расширить известное понятие функциональной зависимости и ввести понятие функции нескольких переменных.

Будем рассматривать функции двух переменных, так как все важнейшие факты теории функций нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных. Эти факты обобщаются на случай большего числа переменных. Кроме того, для функций двух переменных можно дать наглядную геометрическую интерпретацию.

§ 43. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

43.1. Основные понятия

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел $(x; y)$. Соответствие f, которое каждой паре чисел $(x; y) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in \mathbb{R}$, называется ***функцией двух переменных***, определенной на множестве D со значениями в $\mathbb{R}$, и записывается в виде $z = f(x; y)$ или $f : D \to \mathbb{R}$. При этом x и y называются *независимыми переменными (аргументами)*, а z — *зависимой переменной (функцией)*.

Множество $D = D(f)$ называется *областью определения* функции. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется *областью изменения* этой функции, обозначается $E(f)$ или E.

Примером функции двух переменных может служить площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y: $S = xy$. Областью определения этой функции является множество $\{(x; y) \mid x > 0,\ y > 0\}$.

Функцию $z = f(x; y)$, где $(x; y) \in D$ можно понимать (рассматривать) как функцию точки $M(x; y)$ координатной плоскости Oxy. В частности, областью определения может быть вся плоскость или ее часть, ограниченная некоторыми линиями. Линию, ограничивающую область, называют ***границей области***. Точки области, не лежащие на границе, называются ***внутренними***. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется ***открытой***. Область с присоединенной к ней границей называется ***замкнутой***, обозначается $\overline{D}$. Примером замкнутой области является круг с окружностью.

Значение функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ обозначают $z_0 = f(x_0; y_0)$ или $z_0 = f(M_0)$ и называют *частным значением функции*.

Функция двух независимых переменных допускает геометрическое истолкование. Каждой точке $M_0(x_0; y_0)$ области D в системе координат $Oxyz$ соответствует точка $M(x_0; y_0; z_0)$, где $z_0 = f(x_0; y_0)$ — *аппликата* точки M. Совокупность всех таких точек представляет собой некоторую поверхность, которая и будет геометрически изображать данную функцию $z = f(x; y)$.

Например, функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ имеет областью определения круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$ и изображается верхней полусферой с центром в точке $O(0; 0; 0)$ и радиусом $R = 1$ (см. рис. 204).

Функция двух переменных, как и функция одной переменной, может быть задана разными способами: таблицей, аналитически, графиком. Будем пользоваться, как правило аналитическим способом: когда функция задается с помощью формулы.

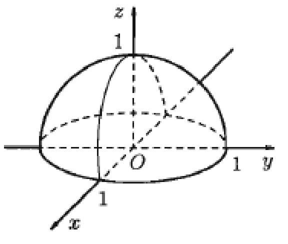

Рис. 204

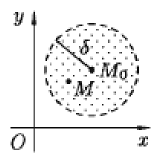

Рис. 205

43.3. Непрерывность функции двух переменных

Функция $z = f(x;y)$ (или $f(M)$) называется ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0;y_0)$, если она:

а) определена в этой точке и некоторой ее окрестности,

б) имеет предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$,

в) этот предел равен значению функции z в точке M_0, т. е.

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0) \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0).$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области*. Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются *точками разрыва* этой функции. Точки разрыва $z = f(x;y)$ могут образовывать целые *линии разрыва*. Так, функция $z = \dfrac{2}{y-x}$ имеет линию разрыва $y = x$.

§ 44. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

44.1. Частные производные первого порядка и их геометрическое истолкование

Пусть задана функция $z = f(x;y)$. Так как x и y — независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется *частным приращением* z по x и обозначается $\Delta_x z$. Итак,

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) - f(x;y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x; y+\Delta y) - f(x;y).$$

Полное приращение Δz функции z определяется равенством

$$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y).$$

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x;y) - f(x;y)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной* функции $z = f(x;y)$ в точке $M(x;y)$ по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z'_x,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ f'_x,\ \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частные производные по x в точке $M_0(x_0;y_0)$ обычно обозначают символами $f'_x(x_0;y_0)$, $f'_x\Big|_{M_0}$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z = f(x;y)$ по переменной y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x;y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $f(x;y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно x или y считается постоянной величиной).

Пример 44.1. Найти частные производные функции
$$z = 2y + e^{x^2-y} + 1.$$

○ Решение:
$$z'_x = (2y + e^{x^2-y} + 1)'_x = (2y)'_x + (e^{x^2-y})'_x + (1)'_x =$$
$$= 0 + e^{x^2-y} \cdot (x^2 - y)'_x + 0 = e^{x^2-y} \cdot (2x - 0) = 2x \cdot e^{x^2-y};$$
$$z'_y = 2 + e^{x^2-y} \cdot (-1).$$
●

44.2. Частные производные высших порядков

Частные производные $\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ называют *частными производными первого порядка*. Их можно рассматривать как функции от $(x;y) \in D$. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются *частными производными второго порядка*. Они определяются и обозначаются следующим образом:
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x;y);$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = z''_{xy} = f''_{xy}(x;y);$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = z''_{yx} = f''_{yx}(x;y);$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x;y).$$
Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т. д. порядков. Так, $z'''_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}\right) = \frac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x^2}$ (или $(z'''_{xyx})'_x = z^{(4)}_{xyx^2}$) и т. д.

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется ***смешанной частной производной***. Таковыми являются, например, z''_{xy}, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, z'''_{xyx}.

Пример 44.2. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$.

○ Решение: Так как $z'_x = 4x^3 - 4xy^3$ и $z'_y = -6x^2y^2 + 5y^4$, то
$$z''_{xy} = (4x^3 - 4xy^3)'_y = -12xy^2,$$
$$z''_{yx} = (-6x^2y^2 + 5y^4)'_x = -12xy^2.$$
Оказалось, что $z''_{xy} = z''_{yx}$. ●

Этот результат не случаен. Имеет место теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема 44.1 (Шварц). Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой. В частности, для $z = f(x;y)$ имеем: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

44.3. Дифференцируемость и полный дифференциал функции

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x; y)$. Составим полное приращение функции в точке M:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Функция $z = f(x; y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M(x; y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \tag{44.1}$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Сумма первых двух слагаемых в равенстве (44.1) представляет собой *главную часть приращения функции*.

Главная часть приращение функции $z = f(x; y)$, линейная относительно Δx и Δy, называется *полным дифференциалом* этой функции и обозначается символом dz:

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y. \tag{44.2}$$

Выражения $A \cdot \Delta x$ и $B \cdot \Delta y$ называют *частными дифференциалами*. Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$. Поэтому равенство (44.2) можно переписать в виде

$$dz = A \cdot dx + B \cdot dy. \tag{44.3}$$

Теорема 44.2 (необходимое условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $M(x; y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем $\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Равенство (44.1) можно записать в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \gamma, \tag{44.4}$$

где $\gamma = \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Отметим, что обратное утверждение не верно, т. е. из непрерывности функции или существования частных производных не следует дифференцируемость функции. Так, непрерывная функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ не дифференцируема в точке $(0; 0)$.

Как следствие теоремы получаем формулу для вычисления полного дифференциала. Формула (44.3) принимает вид:

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy} \tag{44.5}$$

Теорема 44.3 (достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке $M(x; y)$, то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой (44.5).

44.4. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Из определения дифференциала функции $z = f(x;y)$ следует, что при достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ имеет место приближенное равенство

$$\Delta z \approx dz. \qquad (44.6)$$

Так как полное приращение $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$, равенство (44.6) можно переписать в следующем виде:

$$\boxed{f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y.} \qquad (44.7)$$

Формулой (44.7) пользуются в приближенных расчетах.

Пример 44.3. Вычислить приближенно $1{,}02^{3{,}01}$.

Решение: Рассмотрим функцию $z = x^y$. Тогда $1{,}02^{3{,}01} = (x+\Delta x)^{y+\Delta y}$, где $x=1$, $\Delta x = 0{,}02$, $y=3$, $\Delta y = 0{,}01$. Воспользуемся формулой (44.7), предварительно найдя z'_x и z'_y: $z'_x = (x^y)'_x = y \cdot x^{y-1}$, $z'_y = (x^y)'_y = x^y \cdot \ln x$. Следовательно, $1{,}02^{3{,}01} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1} \cdot 0{,}02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}01$, т. е. $1{,}02^{3{,}01} \approx \approx 1{,}06$.

Для сравнения: используя микрокалькулятор, находим: $1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}061418168$. ●

§ 46. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

46.1. Основные понятия

Понятие максимума, минимума, экстремума функции двух переменных аналогичны соответствующим понятиям функции одной независимой переменной (см. п. 25.4).

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой области D, точка $N(x_0;y_0) \in D$.

Точка $(x_0;y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $z = f(x;y)$, если существует такая δ-окрестность точки $(x_0;y_0)$, что для каждой точки $(x;y)$, отличной от $(x_0;y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство $f(x;y) < f(x_0;y_0)$.

Аналогично определяется ***точка минимума*** функции: для всех точек $(x;y)$, отличных от $(x_0;y_0)$, из δ-окрестности точки $(x_0;y_0)$ выполняется неравенство: $f(x;y) > f(x_0;y_0)$.

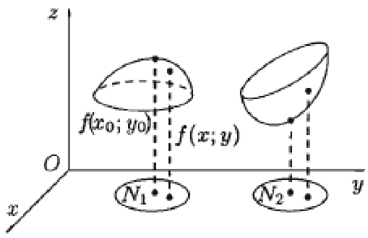

Рис. 209

На рисунке 209: N_1 — точка максимума, а N_2 — точка минимума функции $z = f(x;y)$.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется ***максимумом*** (***минимумом***) функции. Максимум и минимум функции называют ее ***экстремумами***.

Отметим, что, в силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют *локальный* (местный) характер: значение функции в точке $(x_0;y_0)$ сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к $(x_0;y_0)$. В области D функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

46.2. Необходимые и достаточные условия экстремума

Рассмотрим условия существования экстремума функции.

Теорема 46.1 (необходимые условия экстремума). Если в точке $N(x_0; y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x_0; y_0) = 0$, $f'_y(x_0; y_0) = 0$.

Теорема 46.2 (достаточное условие экстремума). Пусть в стационарной точке $(x_0; y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $(x_0; y_0)$ значения $A = f''_{xx}(x_0; y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0; y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0; y_0)$. Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:
1) если $\Delta > 0$, то функция $f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ имеет экстремум: максимум, если $A < 0$; минимум, если $A > 0$;
2) если $\Delta < 0$, то функция $f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ экстремума не имеет.
В случае $\Delta = 0$ экстремум в точке $(x_0; y_0)$ может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Примем без доказательства.

Пример 46.1. Найти экстремум функции $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.

❍ Решение: Здесь $z'_x = 6xy - 3x^2$, $z'_y = 3x^2 - 4y^3$. Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют.

Найдем стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем точки $M_1(6; 3)$ и $M_2(0; 0)$.

Находим частные производные второго порядка данной функции: $z''_{xx} = 6y - 6x$, $z''_{xy} = 6x$, $z''_{yy} = -12y^2$.

В точке $M_1(6; 3)$ имеем: $A = -18$, $B = 36$, $C = -108$, отсюда

$$AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 648,$$

т. е. $\Delta > 0$.

Так как $A < 0$, то в точке M_1 функция имеет локальный максимум: $z_{max} = z(6; 3) = 3 \cdot 36 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 324 - 216 - 81 = 27$.

В точке $M_2(0; 0)$: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ и, значит, $\Delta = 0$. Проведем дополнительное исследование. Значение функции z в точке M_2 равно нулю: $z(0; 0) = 0$. Можно заметить, что $z = -y^4 < 0$ при $x = 0$, $y \neq 0$; $z = -x^3 > 0$ при $x < 0$, $y = 0$. Значит, в окрестности точки $M_2(0; 0)$ функция z принимает как отрицательные, так и положительные значения. Следовательно, в точке M_2 функция экстремума не имеет. ●

46.3. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$. Тогда она достигает в некоторых точках $\overline{D}$ своего наибольшего M и наименьшего m значений (т. н. *глобальный экстремум*). Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области $\overline{D}$, или в точках, лежащих на границе области.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в области $\overline{D}$ функции $z = f(x;y)$ состоит в следующем:

1. Найти все критические точки функции, принадлежащие $\overline{D}$, и вычислить значения функции в них;

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x;y)$ на границах области;

3. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее M и наименьшее m.

Пример 46.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2y + xy^2 + xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = -1{,}5$ (см. рис. 211).

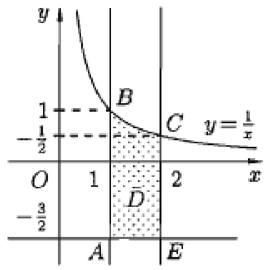

Рис. 211

Решение: Здесь $z'_x = 2xy + y^2 + y$, $z'_y = x^2 + 2xy + x$.

1. Находим все критические точки:

$$\begin{cases} y(2x + y + 1) = 0, \\ x(x + 2y + 1) = 0. \end{cases}$$

Решением системы являются точки $(0;0)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$, $\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Ни одна из найденных точек не принадлежит области $\overline{D}$.

2. Исследуем функцию z на границе области, состоящей из участков AB, BC, CE и EA (рис. 211).

На участке AB: $x = 1$, $z = y^2 + 2y$, где $y \in \left[-\frac{3}{2};1\right]$, $z'_y = 2y + 2$, $2y + 2 = 0$, $y = -1$. Значения функции $z(-1) = -1$, $z\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$, $z(1) = 3$.

На участке BC: $y = \frac{1}{x}$, $z = x + \frac{1}{x} + 1$, где $x \in [1;2]$, $z'_x = 1 - \frac{1}{x^2}$, $1 - \frac{1}{x^2} = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1 \notin [1;2]$. Значения функции $z(1) = 3$, $z(2) = 3{,}5$.

На участке CE: $x = 2$, $z = 2y^2 + 6y$, $y \in \left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$, $z'_y = 4y + 6$, $4y + 6 = 0$, $y = -\frac{3}{2}$. Значения функции $z\left(-\frac{3}{2}\right) = -4{,}5$, $z\left(\frac{1}{2}\right) = 3{,}5$.

На участке AE: $y = -\frac{3}{2}$, $z = -\frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4}x$, $x \in [1;2]$, $z'_x = -3x + \frac{3}{4}$, $-3x + \frac{3}{4} = 0$, $x = \frac{1}{4} \notin [1;2]$. Значения функции $z(1) = -\frac{3}{4}$, $z(2) = -4{,}5$.

3. Сравнивая полученные результаты, имеем:

$$M = +3{,}5 = z\left(2;\frac{1}{2}\right) = z(C);$$

а $m = -4{,}5 = z\left(2;-\frac{3}{2}\right) = z(E)$.